نام و نام خانوادگی:
نام آزمون: ریاضی۳-دوازدهم تجربی-دیماه ۱۴۰۰
تاریخ آزمون: ۱۴۰۰/۱۰/۱۸

زمان برگزاری: ۸۰ دقیقه

دبیرستان عرفان

۱ با محدود کردن دامنهٔ تابع $f(x) = x^{۲} - ۴x + ۵$، یک تابع یک‌به‌یک به‌دست آورده و دامنه و برد f و وارون آن را بنویسید و این دو تابع را رسم کنید.

۲ نمودار توابع زیر را رسم کنید و مشخص کنید در چه بازه‌هایی صعودی و در چه بازه‌هایی نزولی هستند.

الف

$f(x) = \cos(x - \frac{\pi}{۳})$ $\qquad D_f = [۰, ۲\pi]$

۳ به تابعی که گاهی صعودی ..... گاهی نزولی باشد تابع ..... و به تابعی که هم صعودی و هم نزولی باشد تابع ..... گفته می‌شود.

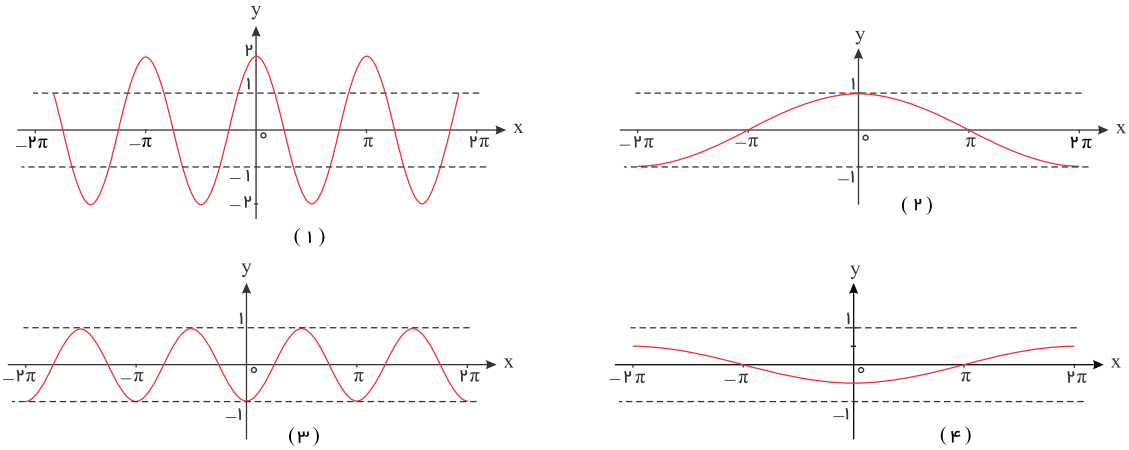
۴ برای تابع وارون‌پذیر f، تابع‌های ترکیب $fof^{-۱}$ و $f^{-۱}of$ چه زمانی باهم برابر می‌شوند؟

۵ به تابعی که ..... باشد تابع یکنوا و به تابعی که ..... باشد تابع اکیداً یکنوا گفته می‌شود.

۶ اگر $f(x) = \frac{۱}{۸}x - ۳$ و $g(x) = x^{۳}$، مقادیر زیر را به‌دست آورید.

الف) $(fog)^{-۱}(۵)$ $\qquad$ ب) $(f^{-۱}of^{-۱})(۶)$ $\qquad$ پ) $(g^{-۱}of^{-۱})(۵)$

۷ با استفاده از نمودار $y = \cos x$، نمودار توابع زیر رسم شده است، ضابطهٔ هر نمودار را مشخص کنید.



الف) $y = -\frac{۱}{۲}\cos(-\frac{۱}{۲}x)$ $\qquad$ ب) $y = ۲\cos ۲x$ $\qquad$ پ) $y = \cos(\frac{۱}{۲}x)$ $\qquad$ ت) $y = -\cos ۲x$

۸ مشخص کنید کدام‌یک از جملات زیر درست و کدام‌یک نادرست است؟

الف) اگر $f(x) = x^{۲} - ۴$ و $g(x) = \sqrt{x^{۲} - ۴}$؛ آنگاه $(fog)(۵) = -۲۵$.

ب) برای دو تابع f و g که $f \neq g$ تساوی $(fog)(x) = (gof)(x)$ هیچ‌وقت برقرار نیست.

پ) اگر $f(۷) = ۵$ و $g(۴) = ۷$، آنگاه $(fog)(۴) = ۵$.

ت) اگر $f(x) = \sqrt{x}$ و $g(x) = ۲x - ۱$، آنگاه $(fog)(۵) = g(۲)$.

۹ اگر $f(g(x)) = ۳x^{۲} - ۶x + ۱۴$ و $f(x) = ۳x - ۴$، ضابطهٔ تابع $g(x)$ را به‌دست آورید.

۱۰ اگر $f = \{(۷,۸), (۵,۳), (۹,۸), (۱۱,۴)\}$ و $g = \{(۵,۷), (۳,۵), (۷,۹), (۹,۱۱)\}$، توابع fog و gof را به‌دست آورید.

۱۱ فرض کنید $\cos\alpha = \frac{۵}{۱۳}$ و α زاویه‌ای حاده باشد، حاصل عبارات زیر را به‌دست آورید.

الف) $\cos ۲\alpha$ ب) $\sin ۲\alpha$

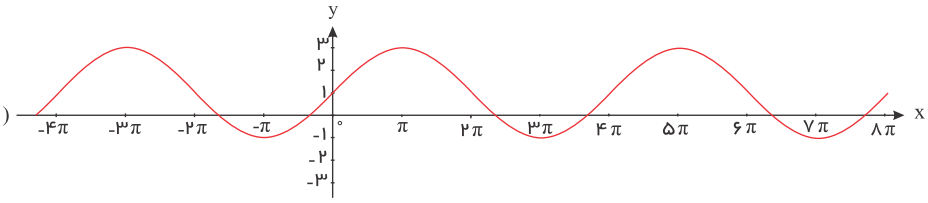
۱۲ معادلات زیر را حل کنید.

الف

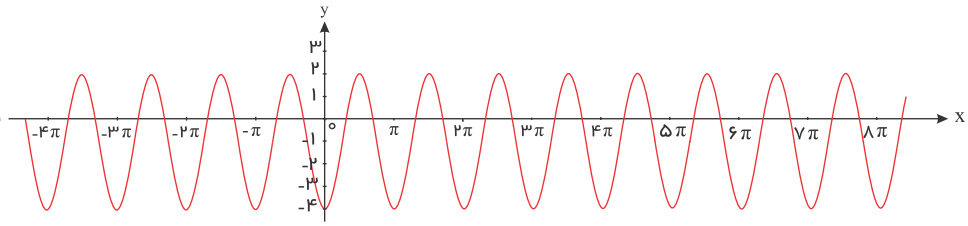
$\cos ۲x - \cos x + ۱ = ۰$

۱۳ ضابطهٔ مربوط به هریک از نمودارهای داده شده را بنویسید.

الف)



ب)



۱۴ به سوالات زیر پاسخ دهید.

الف مقدار $\sin ۲۲/۵^\circ$ را به‌دست آورید.

۱۵ حدود زیر را در صورت وجود محاسبه کنید.

الف

$$\lim_{x\to -۳} \frac{x^۲ - ۹}{x^۲ + ۳x}$$

ب

$$\lim_{x\to \frac{۱}{۲}} \frac{۴x^۲ - ۴x + ۱}{۲x^۲ + x - ۱}$$

پ

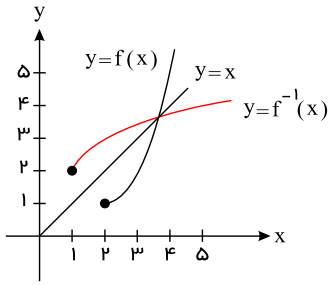
$$\lim_{x\to -۱} \frac{x^۲ - ۱}{x + \sqrt{۲x + ۳}}$$

پاسخنامه تشریحی

۱ تابع $f(x)=x^{۲}-۴x+۵$ معرف سهمی $f(x)=(x-۲)^{۲}+۱$ با محور تقارن $x_s=۲$ می‌باشدکه غیر یک‌به‌یک و وارون‌ناپذیر است.

حال اگر دامنهٔ تابع را به یکی از فاصله‌های $[x_s,+\infty)=[۲,+\infty)$ یا $(-\infty,x_s]=(-\infty,۲]$ محدود کنیم تابع f یک‌به‌یک و وارون‌پذیر خواهد شد:

حالت اول:



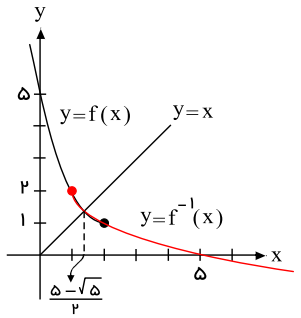
$$\begin{cases} f(x)=(x-۲)^{۲}+۱ \\ D_f=[۲,+\infty) \end{cases} \to y=(x-۲)^{۲}+۱$$

$$\to (x-۲)^{۲}=y-۱ \xrightarrow{\text{جذر}} |x-۲|=\sqrt{y-۱}$$

$$\xrightarrow[x-۲\geq ۰]{\text{با توجه به } D_f} x-۲=\sqrt{y-۱} \to x=\sqrt{y-۱}+۲$$

$$\to f^{-۱}(x)=\sqrt{x-۱}+۲$$

حالت دوم:



$$\begin{cases} f(x)=(x-۲)^{۲}+۱ \\ D_f=(-\infty,۲] \end{cases} \to y=(x-۲)^{۲}+۱$$

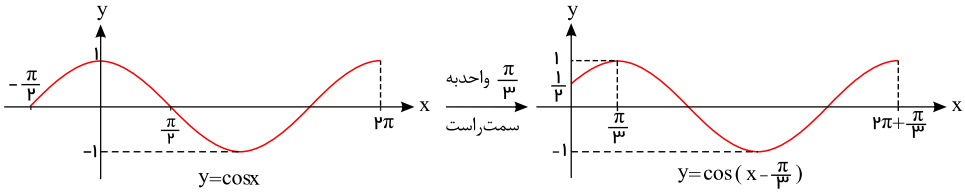
$$\to (x-۲)^{۲}=y-۱ \xrightarrow{\text{جذر}} |x-۲|=\sqrt{y-۱}$$

$$\xrightarrow[x-۲\leq ۰]{\text{با توجه به } D_f} -(x-۲)=\sqrt{y-۱} \to x-۲=-\sqrt{y-۱} \to x=-\sqrt{y-۱}+۲$$

$$\to f^{-۱}(x)=-\sqrt{x-۱}+۲$$

۲

الف برای رسم نمودار $f(x)=\cos(x-\frac{\pi}{۳})$ در فاصلهٔ $D_f=[۰,۲\pi]$ کافی است نمودار $y=\cos x$ را در راستای محور طول‌ها به اندازهٔ $\frac{\pi}{۳}$ به سمت راست انتقال دهیم:



به جای اینکه نمودار را $\frac{\pi}{۳}$ واحد به راست ببرید می‌توان محور y را همین اندازه به سمت چپ کشید!

۳ به تابعی گه گاهی صعودی و گاهی نزولی باشد تابع غیریکنوا و به تابعی که هم صعودی و هم نزولی باشد تابع ثابت گفته می‌شود.

۴ در نگاه اول ممکن است باتوجه به وجود روابط $fof^{-۱}(x)=x$ و $f^{-۱}of(x)=x$ تصور کنیم که توابع $fof^{-۱}$ و $f^{-۱}of$ به‌دلیل همانی بودن، همواره باهم برابرند که البته تصور غلطی است. حقیقت در دامنهٔ این توابع نهان است.

$$D_{fof^{-۱}}=\{x\in D_{f^{-۱}}|f^{-۱}(x)\in D_f\}\ ,\ D_{f^{-۱}of}=\{x\in D_f|f(x)\in D_{f^{-۱}}\}$$

با دقت روی این دامنه‌ها درمی‌یابیم در رابطهٔ $fof^{-۱}(x)=x$، x از دامنهٔ $f^{-۱}$ (به‌شرطی‌که $f^{-۱}(x)$ متعلق به دامنهٔ f باشد) انتخاب می‌شود و درحالی‌که در رابطهٔ $f^{-۱}of(x)=x$، x از دامنهٔ f (با این شرط که $f(x)\in D_{f^{-۱}}$ است) انتخاب می‌شود. پس اگر دامنه و برد تابع وارون‌پذیر f باهم برابر باشند ($D_f=R_f$) توابع ترکیب $fof^{-۱}$ و $f^{-۱}of$ نیز باهم برابر می‌شوند. به‌عبارت دیگر اگر تابع f همانی باشد، تابع‌های $fof^{-۱}$ و $f^{-۱}of$ باهم برابر خواهند بود. مثلاً برای $f=\{(۱,۱),(۲,۲),(۰,۰)\}$ داریم:

$$f^{-۱}=\{(۱,۱),(۲,۲),(۰,۰)\}\to fof^{-۱}=f^{-۱}of=\{(۱,۱),(۲,۲),(۰,۰)\}$$

۵ براساس تعریف به تابعی که صعودی یا نزولی باشد تابع یکنوا و به تابعی که اکیداً صعودی یا اکیداً نزولی باشد تابع اکیداً یکنوا می‌گویند.

۶ الف)

برای محاسبهٔ $(fog)^{-۱}(۵)$ دو راه پیش‌رو داریم. یکی اینکه تابع مرکب fog را محاسبه کرده و وارون آن را بیابیم و در نهایت به جای xهای آن ۵ قرار دهیم. دیگر اینکه از رابطهٔ

$(fog)^{-1}(x)=(g^{-1}of^{-1})(x)$ استفاده کرده و با توجه به تابع وارون‌های f^{-1} و g^{-1}، تابع مرکب $g^{-1}of^{-1}$ را محاسبه کرده و به‌جای xهایش ۵ قرار دهیم. ما هردو راهکار را انجام می‌دهیم:

روش اول:

$$\begin{cases} f(x)=\frac{1}{8}x-3 \\ g(x)=x^3 \end{cases} \to fog(x)=f(g(x))=f(x^3)=\frac{1}{8}x^3-3 \to fog(x)=\frac{1}{8}x^3-3$$

$$\xrightarrow{\text{حالا محاسبه } (fog)^{-1}} y=\frac{1}{8}x^3-3 \xrightarrow{+3} \frac{1}{8}x^3=y+3 \xrightarrow{\times 8} x^3=8y+24$$

$$\xrightarrow{\text{ریشه سوم بگیر.}} x=\sqrt[3]{8y+24} \to (fog)^{-1}(x)=\sqrt[3]{8x+24} \xrightarrow[x=5]{\text{قرار بده}} (fog)^{-1}(5)=\sqrt[3]{40+24}=\sqrt[3]{64}=\sqrt[3]{4^3}=4$$

حال، روش دوم را نیز امتحان می‌کنیم:

$$\begin{cases} f(x)=\frac{1}{8}x-3 \to y=\frac{1}{8}x-3 \to \frac{1}{8}x=y+3 \to x=8y+24 \to f^{-1}(x)=8x+24 \\ g(x)=x^3 \to y=x^3 \to x=\sqrt[3]{y} \to g^{-1}(x)=\sqrt[3]{x} \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{حالا می‌نویسیم}} (fog)^{-1}(x)=(g^{-1}of^{-1})(x)=g^{-1}(f^{-1}(x))=g^{-1}(8x+24)=\sqrt[3]{8x+24}$$

$$\xrightarrow[x=5]{\text{قرار بده}} (fog)^{-1}(5)=\sqrt[3]{40+24}=\sqrt[3]{64}=\sqrt[3]{4^3}=4$$

حال، با توجه به ضابطه‌های f^{-1} و g^{-1} موارد (ب) و (پ) را به راحتی می‌توانیم محاسبه کنیم:

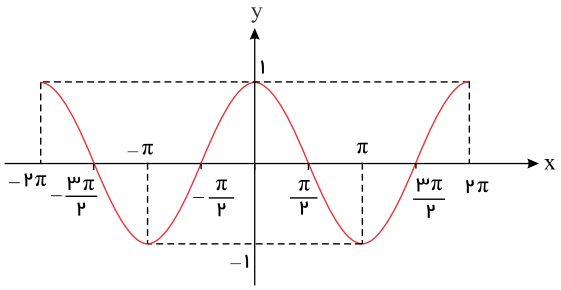
ب) $(f^{-1}of^{-1})(6)=f^{-1}(f^{-1}(6)) \xrightarrow[f^{-1}(6)=48+24=72]{f^{-1}(x)=8x+24} f^{-1}(72)=8(72)+24=600$

پ) $(g^{-1}of^{-1})(5)=g^{-1}(f^{-1}(5)) \xrightarrow[f^{-1}(5)=40+24=64]{f^{-1}(x)=8x+24} g^{-1}(64)=\sqrt[3]{64}=4$

همانطور که می‌بینید جواب‌های موارد (الف) و (پ) یکی هستند!

---

۷ ابتدا به نمودار تابع $y=\cos x$ در بازهٔ $[-2\pi,2\pi]$ توجه کنید:



با توجه به این نمودار و دورهٔ تناوب هر تابع و نیز برد آن‌ها به راحتی می‌توانیم تشخیص دهیم که نمودار (۴) مربوط به تابع (الف)، نمودار (۱) مربوط به تابع (ب)، نمودار (۲) متعلق به تابع (پ) و بالاخره نمودار (۳) متعلق به تابع (ت) می‌باشد.

الف) $y=-\frac{1}{2}\cos(-\frac{1}{2}x) \to$ طول هر نقطه از نمودار $y=\cos x$ را-2 برابر و عرض آن‌ها را $\frac{-1}{2}$ برابرمی‌کنیم.

ب) $y=2\cos 2x \to$ طول هر نقطه از نمودار $y=\cos x$ را $\frac{1}{2}$ برابر و عرض آن‌ها را ۲ برابر می‌کنیم.

پ) $y=\cos(\frac{1}{2}x) \to$ با ثابت ماندن عرض هر نقطه از نمودار $y=\cos x$ باید طول هریک را ۲ برابر کرد.

ت) $y=-\cos 2x \to$ طول هر نقطه را نصف و عرض را قرینه می‌کنیم.

---

۸ الف)این مورد نادرست است. زیرا حاصل $fog(5)$ برابر ۱۷ است نه -25.

$$\begin{cases} f(x)=x^2-4 \\ g(x)=\sqrt{x^2-4} \end{cases} \to fog(5)=f(\underbrace{g(5)}_{g(5)=\sqrt{25-4}=\sqrt{21}})=f(\sqrt{21})=(\sqrt{21})^2-4=21-4=17$$

ب)این مورد هم نادرست است. چراکه با فرض $f(x)=\frac{1}{x}$ و $g(x)=x$ شرط $f\neq g$ برای هر $x\neq\pm 1$ برقرار بوده و داریم:

$$fog(x) = f(g(x)) = f(x) = \frac{۱}{x}\ ,\ gof(x) = g(f(x)) = g(\frac{۱}{x}) = \frac{۱}{x}$$

می‌بینیم که علی‌رغم برابر نبودن f و g توابع fog و gof برابرند.

پ)این مورد درست است. زیرا $fog(۴) = f(\underbrace{g(۴)}_{۷}) = f(۷) = ۵$

ت)این مورد نیز درست است. زیرا:

$$fog(۵) = f(g(۵)) \xrightarrow[g(۵)=۲(۵)-۱=۹]{g(x)=۲x-۱} f(۹) \xrightarrow{f(x)=\sqrt{x}} \sqrt{۹} = ۳$$

از طرف دیگر با توجه به $g(x) = ۲x - ۱$، $g(۲) = ۲(۲) - ۱ = ۳$ می‌باشد. یعنی تساوی $fog(۵) = g(۲)$ برقرار است.

۹ خیلی ساده است: ببینید:

$$\begin{cases} f(x) = ۳x - ۴ \\ f(g(x)) = ۳x^۲ - ۶x + ۱۴ \end{cases} \rightarrow ۳g(x) - ۴ = ۳x^۲ - ۶x + ۱۴$$

$$\xrightarrow{+۴} ۳g(x) = ۳x^۲ - ۶x + ۱۸ \xrightarrow{\div ۳} g(x) = x^۲ - ۲x + ۶$$

۱۰ با توجه به این نکته که «در $fog(a)$ ابتدا a وارد ماشین g شده و $g(a)$ بیرون می‌آید و سپس $g(a)$ وارد ماشین f شده و $fog(a)$ بیرون می‌آید» داریم:

$$\begin{cases} f = \{(۷,۸),(۵,۳),(۹,۸),(۱۱,۴)\}\} \\ g = \{(۵,۷),(۳,۵),(۷,۹),(۹,۱۱)\}\} \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} fog\ =? \begin{cases} ۵ \xrightarrow{g} ۷ \xrightarrow{f} ۸ : fog(۵) = ۸ \\ ۳ \xrightarrow{g} ۵ \xrightarrow{f} ۳ : fog(۳) = ۳ \\ ۷ \xrightarrow{g} ۹ \xrightarrow{f} ۸ : fog(۷) = ۸ \\ ۹ \xrightarrow{g} ۱۱ \xrightarrow{f} ۴ : fog(۹) = ۴ \end{cases} = \{(۵,۸),(۳,۳),(۷,۸),(۹,۴)\} \\ gof\ =? \begin{cases} ۷ \xrightarrow{f} ۸ \xrightarrow{g} \times \\ ۵ \xrightarrow{f} ۳ \xrightarrow{g} ۵ : gof(۵) = ۵ \\ ۹ \xrightarrow{f} ۸ \xrightarrow{g} \times \\ ۱۱ \xrightarrow{f} ۴ \xrightarrow{g} \times \end{cases} = \{(۵,۵)\} \end{cases}$$

۱۱

$$\sin^۲\alpha = ۱ - \cos^۲\alpha = ۱ - \frac{۲۵}{۱۶۹} = \frac{۱۴۴}{۱۶۹} \rightarrow \sin\alpha = \pm\frac{۱۲}{۱۳} \xrightarrow{\alpha\ \text{حاده است.}} \sin\alpha = \frac{۱۲}{۱۳}$$

الف) $\cos ۲\alpha = ۲\cos^۲\alpha - ۱ = ۲(\frac{۲۵}{۱۶۹}) - ۱ = \frac{۵۰}{۱۶۹} - ۱ = \frac{-۱۱۹}{۱۶۹}$

ب) $\sin ۲\alpha = ۲\sin\alpha\cos\alpha = ۲(\frac{۱۲}{۱۳})(\frac{۵}{۱۳}) = \frac{۱۲۰}{۱۶۹}$

۱۲

الف

$$\cos ۲x - \cos x + ۱ = ۰ \xrightarrow{\cos ۲x = ۲\cos^۲ x - ۱} ۲\cos^۲ x - ۱ - \cos x + ۱ = ۰$$

$$\rightarrow ۲\cos^۲ x - \cos x = ۰ \rightarrow \cos x(۲\cos x - ۱) = ۰$$

$$\rightarrow \begin{cases} \cos x = ۰ \xrightarrow{\text{حالت خاص}} x = k\pi + \frac{\pi}{۲} \\ \cos x = \frac{۱}{۲} = \cos\frac{\pi}{۳} \xrightarrow{x=۲k\pi\pm\alpha} x = ۲k\pi \pm \frac{\pi}{۳} \end{cases}$$

۱۳ الف) نمودار داده شده یک تابع سینوسی با $T = ۴\pi$ و $Max = ۳$ و $Min = -۱$ است. ($y = a\sin bx + c$)

$$T = ۴ \rightarrow \frac{۲\pi}{|b|} = ۴\pi \rightarrow |b| = \frac{۱}{۲} \rightarrow b = \pm\frac{۱}{۲}$$

$$\left.\begin{array}{l} Max = ۳ \to |a| + c = ۳ \\ Min = -۱ \to -|a| + c = -۱ \end{array}\right\} \to c = ۱\ ,\ a = \pm ۲$$

چون شکل، فرمت خود سینوس را دارد باید $ab > ۰$ باشد پس:

$$y = ۲\sin(\frac{۱}{۲}x) + ۱ \quad \text{یا} \quad y = -۲\sin(\frac{-۱}{۲}x) + ۱$$

ب) نمودار داده شده یک تابع کسینوسی با $T = \pi$ و $Max = ۲$ و $Min = -۴$ است. $(y = a\cos bx + c)$

$$T = \pi \to \frac{۲\pi}{|b|} = \pi \to |b| = ۲ \to b = \pm ۲$$

$$\left.\begin{array}{l} Max = ۲ \to |a| + c = ۲ \\ Min = -۴ \to -|a| + c = -۴ \end{array}\right\} \to c = -۱\ ,\ a = \pm ۳$$

چون شکل، فرمت قرینهٔ کسینوس را دارد باید $a < ۰$ باشد پس:

$$y = -۳\cos(\pm ۲x) - ۱$$

۱۴

الف

$$\sin^۲\alpha = \frac{۱ - \cos ۲\alpha}{۲} \to \sin^۲ ۲۲/۵^\circ = \frac{۱ - \cos ۴۵^\circ}{۲} = \frac{۱ - \frac{\sqrt{۲}}{۲}}{۲} = \frac{۲ - \sqrt{۲}}{۴} \to \sin ۲۲/۵^\circ = \frac{\sqrt{۲ - \sqrt{۲}}}{۲}$$

۱۵

الف

$$\lim_{x \to -۳} \frac{x^۲ - ۹}{x^۲ + ۳x} = \frac{۰}{۰} \text{ مبهم}$$

پس: $\lim_{x \to -۳} \frac{x^۲ - ۹}{x^۲ + ۳x} = \lim_{x \to -۳} \frac{(x + ۳)(x - ۳)}{x(x + ۳)} = \lim_{x \to -۳} \frac{x - ۳}{x} = \frac{-۶}{-۳} = ۲$

ب

$$\lim_{x \to \frac{۱}{۲}} \frac{۴x^۲ - ۴x + ۱}{۲x^۲ + x - ۱} = \frac{۰}{۰} \text{ مبهم}$$

برای رفع ابهام، صورت و مخرج را بر عامل ابهام یعنی $x - \frac{۱}{۲}$ تقسیم می‌کنیم.

$$\begin{array}{l|l} ۴x^۲ - ۴x + ۱ & x - \frac{۱}{۲} \\ \hline & ۴x - ۲ \\ \underline{-۴x^۲ + ۲x} & \\ -۲x + ۱ & \\ \underline{۲x - ۱} & \\ \text{صفر} & \end{array} \quad \text{و} \quad \begin{array}{l|l} ۲x^۲ + x - ۱ & x - \frac{۱}{۲} \\ \hline & ۲x + ۲ \\ \underline{-۲x^۲ + x} & \\ ۲x - ۱ & \\ \underline{-۲x + ۱} & \\ \text{صفر} & \end{array}$$

پس: $\lim_{x \to \frac{۱}{۲}} \frac{۴x^۲ - ۴x + ۱}{۲x^۲ + x - ۱} = \lim_{x \to \frac{۱}{۲}} \frac{(x - \frac{۱}{۲})(۴x - ۲)}{(x - \frac{۱}{۲})(۲x + ۲)} = \lim_{x \to \frac{۱}{۲}} \frac{۴x - ۲}{۲x + ۲} = \frac{۰}{۳} = ۰$

پ

$$\lim_{x \to -۱} \frac{x^۲ - ۱}{x + \sqrt{۲x + ۳}} = \frac{۰}{۰} \text{ مبهم}$$

برای رفع ابهام، عبارت را در مزدوج مخرج، ضرب و تقسیم می‌کنیم.

پس: $\lim_{x \to -۱} \frac{x^۲ - ۱}{x + \sqrt{۲x + ۳}} \times \frac{x - \sqrt{۲x + ۳}}{x - \sqrt{۲x + ۳}} = \lim_{x \to -۱} \frac{(x^۲ - ۱)(x - \sqrt{۲x + ۳})}{x^۲ - ۲x - ۳}$

$$= \lim_{x \to -۱} \frac{(x+۱)(x-۱)(x-\sqrt{۲x+۳})}{(x-۳)(x+۱)} = \lim_{x \to -۱} \frac{(x-۱)(x-\sqrt{۲x+۳})}{(x-۳)}$$

$$= \frac{(-۲)(-۲)}{-۴} = \frac{۴}{-۴} = -۱$$